

Exercice n° : 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit z une solution autre que zéro de l'équation, dans l'ensemble des nombres complexes, (E) : $z^{n-1} = -\bar{z}$

a) $|z| = 1$

b) $z^n = -1$

2°) Soient Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 trois droites strictement parallèles.

L'isométrie $f = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_3}$ est une :

a) Symétrie orthogonale

b) Symétrie glissante

3°) La courbe (C_f) représentée ci-contre est celle d'une

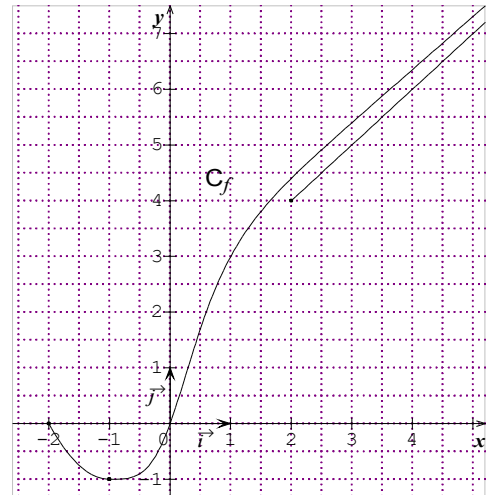
fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ et telle que : $f(-1) = -1$

et la droite D d'équation $y = x + 2$ est une

asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 2x}{x} = -1$



Exercice n° : 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{O}\bar{I}, \vec{O}\bar{J})$. Soit f l'application du plan

dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = i\bar{z} + 1$.

1°) a) Déterminer les images par f des points O , I et J .

b) Montrer que f est une isométrie qui ne fixe aucun point.

c) En déduire la nature de f .

2°) Soit t la translation de vecteur \vec{u} d'affixe $\frac{-1}{2}(1+i)$

a) Montrer que l'écriture complexe de $f \circ t$ est : $z' = i\bar{z} + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par $f \circ t$. En déduire la nature de $f \circ t$.

c) Déterminer alors la forme réduite de f .

Exercice n° : 3 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de côté 2 et de centre O.

On désigne par :

- I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [OC]
- S : la symétrie centrale de centre O.
- R : le quart de tour direct de centre I
- $\varphi = S \circ R$

- 1°) a) Déterminer $\varphi(I)$. En déduire que φ est une isométrie distincte de identité.
 b) Déterminer $\varphi(J)$ puis $\varphi(B)$
 c) Déduire que φ est une rotation de centre J dont on précisera l'angle.
- 2°) Soit g l'isométrie définie par $g = \varphi \circ S_{(AC)}$ où $S_{(AC)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (AC)
 a) Caractériser : $S_{(JC)} \circ S_{(JL)}$ et $S_{(JL)} \circ S_{(AC)}$
 b) Déduire que $g = S_{(JC)} \circ S_L$
 c) On désigne par Δ_1 et Δ_2 les médiatrices respectives de [JC] et [OJ].
 Caractériser $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$. En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
- 3°) Soit G le barycentre des points pondérés (O, 2) ; (J, -1) et (I, 1) et G' son image par φ .
 Exprimer $\overline{CG'}$ en fonction de \overline{CJ} et \overline{CK} puis construire G' sans construire G.

Exercice n° : 4 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité de longueur est 3 cm.

1^{ère} PARTIE :

On considère la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$ et on désigne par C sa courbe représentative.

- 1°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2.
 b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative C.
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ dans un intervalle J que l'on précisera
 On note g la bijection réciproque de f .

b) Construire la courbe représentative C' de g dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c) Montrer que $\forall x \in J, g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2^{ème} PARTIE :

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $U_0 \in]3, 4[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 3 + f(U_n)$.

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in]2, 3[$.

2°) a) Montrer que pour tout $x \in]3, 4[$, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x - 3$ admet dans $]3, 4[$ une solution unique α .

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

d) En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

3^{ème} partie :

On considère la fonction φ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :
$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{g(\cos(2x))}, & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

1°) Montrer que φ est continue à droite en 0.

2°) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \varphi(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin(2x)}$.

3°) Montrer que φ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dans un intervalle K que l'on précisera.

On note φ^{-1} sa bijection réciproque.

4°) Calculer $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. Montrer que φ^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ et déterminer $(\varphi^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)$.

5°) Etudier la dérivabilité de φ^{-1} sur K , puis expliciter $(\varphi^{-1})'(x)$ en fonction de x . 🚩